

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ СЧЕТЕ ЧАСТИЦ

Результат физического измерения всегда отклоняется от действительного значения измеряемой величины. Это отклонение (ошибка измерения) складывается из большого числа малых случайных и систематических ошибок, допускаемых при измерении. Ошибка, обусловленная случайными отклонениями, подчиняется известному закону распределения Гаусса для случайных величин.

Согласно закону Гаусса вероятность в результате измерения величины  $x$  получить значение в пределах  $x, x+dx$  равна

$$W(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - математическое ожидание величины  $x$ ,  $\sigma^2$  – так называемая “дисперсия измеряемой величины”, обозначаемая часто  $D(x)$ .

$D(x)$  – сокращенная запись выражения “дисперсия случайной величины”  $x$ , а отнюдь не знак функциональной зависимости.

Дисперсия есть средний квадрат отклонения измеренной величины от ее действительного значения

$$D(x) = \overline{(x-\alpha)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha)^2 W(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

Дисперсия характеризует ошибки отдельного измерения и является характеристикой экспериментальной установки и методики измерений. Чем грубее измерения (больше разброс), тем больше дисперсия. Величина  $\sigma = \sqrt{D(x)}$  называется среднеквадратичной ошибкой измерения. В большинстве случаев дисперсия заранее неизвестна и может быть определена только из разброса результатов измерения. Приблизительно принимают дисперсию равной среднему квадрату отклонений результатов измерений от их среднего значения

$$\sigma^2 = D(x) = \overline{(x-\bar{x})^2} = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) / N, \quad (2)$$

где  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$  - среднее значение, полученное в данной серии измерений,  $N$  - число измерений. Можно доказать, что лучшее приближение к точной величине получается, если в (2) вместо  $N$  подставить  $(N-1)$ , т.е.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1} \quad (2a)$$

Усредненный результат серии измерений, естественно, меньше отклоняется от точного значения, чем отдельные измерения. Можно показать, что величина  $x'_m$ , полученная в результате усреднения по

$m$  измерениям,  $x' = \left( \sum_{i=1}^m x_i \right) / m$ , подчиняется гауссову распределению с дисперсией в  $m$  раз меньшей дисперсии распределения отдельных величин  $x$ :

$$\sigma^2(x') = D(x') = \frac{D(x)}{m} = \frac{(x - \bar{x})^2}{m} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{m(N-1)} \quad (3)$$

Зная дисперсию, можно с помощью закона Гаусса оценить надежность измерения, т.е. ответить на вопрос: с какой вероятностью действительное значение измеренной величины лежит в пределах  $x+\varepsilon$ ,  $x-\varepsilon$ , где  $x$  - результат измерения, а  $\varepsilon > 0$  произвольное число. Искомая вероятность равна (приблизительно заменяя под интегралом  $\alpha$  на  $x$ ):

$$P(\varepsilon) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} W(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon/\sigma}^{\varepsilon/\sigma} e^{-z^2/2} dz$$

ИЛИ

$$P(\varepsilon / \sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon/\sigma} e^{-z^2/2} dz \quad (4)$$

Таблица интеграла  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy$ , так называемого “интеграла ошибок Гаусса”, приводится в каждом курсе теории вероятностей. С помощью таблиц находим

$$P(1) = 0,68, \quad P(2) = 0,95, \quad P(3) = 0,997.$$

Это означает, что с вероятностью 68% истинное значение отличается от результата измерения не более чем на одну среднеквадратичную ошибку, с вероятностью 95% - не более чем на две среднеквадратичных ошибки и с вероятностью 99,7% - не более чем на 3 ошибки. Результат измерения приводится всегда вместе со своей ошибкой. Так, например, для некоторой величины

$$T = 2,25 \pm 0,04 \text{ мин} \quad (0,04 - \text{ср.кв.ошибка}).$$

Как следует из сказанного выше, это отнюдь не означает, что ошибка измерения не превосходит 0,04 мин; наоборот, вероятность большей ошибки значительна – 32%. Делая выводы из результатов измерений, нужно считаться с реальностью двукратной ошибки, вероятность больших отклонений уже мала – 5%.

Нередко точки, отличающиеся от среднего значения более чем на три ошибки, отбрасывают на том основании, что вероятность таких отклонений всего 0,3%. Это допустимо только при достаточном числе измерений. При малом числе точек приближения, сделанные при выводе соотношений (2) и (4), влекут за собой недооценку вероятности больших ошибок. Точный расчет дает, например, для 5 измерений вероятность ошибки большей двукратной – 12% и большей трехкратной – 4% вместо 5% и 0,3% по (4).

### **Статистические ошибки**

Важным частным случаем ошибок являются так называемые “статистические ошибки”, зависящие не от несовершенства измерительной аппаратуры, а от вероятностного характера самой измеряемой величины. Статистические ошибки – это флуктуации измеряемой величины вокруг своего среднего значения. При измерении числа частиц или зависящих от него величин флуктуация есть следствие дискретной, атомарной структуры вещества и проявляется тем резче, чем с меньшим числом частиц мы имеем

дело. При измерениях со счетчиками, когда производится счет небольшого числа частиц, флуктуации нередко являются основным источником погрешности и прочими случайными ошибками можно пренебречь.

Так как функция распределения в этом случае дается известной формулой Пуассона, то дисперсию можно вычислить теоретически. Пусть среднее число частиц, пересекающих счетчик за интервал  $t$ , равно  $\nu$ . Тогда вероятность пролета за этот же интервал  $n$  частиц выражается формулой Пуассона

$$W(n) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!}. \quad (5)$$

Вычислим дисперсию  $D(n)$ , т.е. средний квадрат отклонения  $n$  от своего среднего значения  $\nu$ :

$$\begin{aligned} D(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n - \nu)^2 W(n) = e^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (n - \nu)^2 \frac{\nu^n}{n!} = \\ &= e^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \nu \frac{n \nu^{n-1}}{(n-1)!} - 2\nu^2 \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!} + \nu^2 \frac{\nu^n}{n!} \right]. \end{aligned}$$

Второй и третий члены суммы дают, очевидно,

$$-2\nu^2 e^{\nu} + \nu^2 e^{\nu} = -\nu^2 e^{\nu}.$$

Первый член

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu \frac{n \nu^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \nu^2 \frac{\nu^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!} = \nu^2 e^{\nu} + \nu e^{\nu}.$$

В результате имеем

$$D(n) = e^{-\nu} (\nu^2 + \nu - \nu^2) e^{\nu} = \nu. \quad (6)$$

Таким образом, дисперсия числа частиц, пролетающих за некоторый интервал времени, равна среднему числу пролетающих за этот интервал частиц. Истинное среднее значение  $\nu$ , как правило, неизвестно, поэтому приближенно принимают

$$D(n) \approx n. \quad (7)$$

Среднеквадратичная ошибка равна корню из числа частиц:

$$\sigma = \sqrt{D(n)} = \sqrt{v} \approx \sqrt{n}. \quad (8)$$

Для большого числа частиц (практически для  $v \geq 20$ ) огибающая распределения Пуассона (дискретного!) мало отличается от распределения Гаусса (непрерывного!) с дисперсией  $\sigma^2$ , т.е. аналогично,

$$W(n)dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(n-v)^2}{2v}} dn. \quad (9)$$

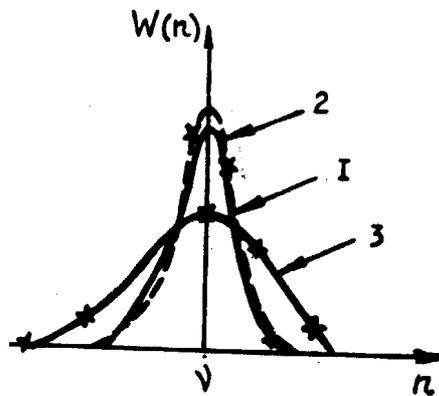


Рис.1. 1-огибающая распределения Пуассона  $v = 20$ ;  
2 – кривая Гаусса  $v = 20$ ; 3 – кривая Гаусса  $v = 80$ .

На рис.1 представлены огибающая распределения Пуассона для  $v=20$  и распределения Гаусса для  $v = 20$  и  $80$ . С увеличением числа частиц кривая распределения растет вширь медленнее, чем возрастает  $v$ . Иначе говоря, абсолютная величина среднеквадратичной ошибки  $\sigma$  растет с  $v$ , но относительная ошибка  $\delta$  падает. Величина  $\delta$  - обратно пропорциональна корню из числа сосчитанных частиц:

$$\delta = \frac{\sigma}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (10)$$

Отсюда можно найти число частиц, которые нужно сосчитать для получения заданной точности:

$$n = 1 / \delta^2. \quad (11)$$

Таким образом, чтобы измерить среднее число частиц с точностью 10%, нужно сосчитать 100 частиц, с точностью 1%-10<sup>4</sup> частиц, с точностью 0,1% - 10<sup>6</sup> частиц.

### Ошибка функции измеренных величин

Пусть  $x_1, x_2$  - независимые случайные величины со средними значениями  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ , с дисперсиями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  и пусть  $\Phi(x_1, x_2)$  - некоторая функция этих величин. Спрашивается, по какому закону распределяются значения  $\Phi(x_1, x_2)$  вокруг своей средней величины и какова дисперсия  $D[\Phi(x_1, x_2)]$ ? Чтобы выяснить этот вопрос, нам понадобятся следующие простые теоремы:

1. Умножение случайной величины на постоянное число и прибавление постоянной только меняют масштаб и сдвигают начало отсчета. Поэтому после таких операций функция распределения должна оставаться гауссовой, но, вообще говоря, с другим средним значением и дисперсией.
2. Прибавление к случайной величине постоянного числа не меняет ее дисперсии

$$D(x + c) = \overline{[(x + c) - (\bar{x} + c)]^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = D(x) . \quad (12)$$

3. При умножении случайной величины на постоянное число дисперсия изменяется пропорционально квадрату этого числа

$$D(cx) = \overline{(cx - c\bar{x})^2} = c^2 \overline{(x - \bar{x})^2} = c^2 D(x) \quad (13)$$

4. В теории вероятностей доказывается, что сумма двух независимых случайных величин, подчиняющихся распределению Гаусса, подчиняется тому же распределению, но с суммарной дисперсией.

Докажем последнюю часть этого утверждения.

$$D(x_1 + x_2) = \overline{[(x_1 + x_2) - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)]^2} = \overline{(x_1 - \bar{x}_1)^2} + \overline{(x_2 - \bar{x}_2)^2} - 2\overline{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)} .$$

Отклонения  $(x_1 - \bar{x}_1)$  и  $(x_2 - \bar{x}_2)$  независимы и могут принимать любой знак, поэтому последний член справа равен нулю, и мы имеем

$$D(x_1 + x_2) = D(x_1) + D(x_2). \quad (14)$$

Если ошибки достаточно малы, то функцию  $\Phi(x_1, x_2)$  можно разложить в ряд Тейлора вокруг средних значений  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  и оставить только первые члены разложения

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_2}(x_2 - \bar{x}_2).$$

Здесь  $\frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_{1,2}}$  означает значение производной при  $x_1 = \bar{x}_1$  и  $x_2 = \bar{x}_2$ .

Усредняя это выражение, имеем  $\overline{\Phi(x_1, x_2)} = \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

Из теорем (1-4) следует, что  $\Phi(x_1, x_2)$  имеет гауссово распределение вокруг среднего значения  $\Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  с дисперсией

$$D[\Phi(x_1, x_2)] = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_1}\right)^2 D(x_1) + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_2}\right)^2 D(x_2)$$

или, в других обозначениях,

$$\sigma_\Phi^2 = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_2}\right)^2 \sigma_2^2. \quad (15)$$

Среднеквадратичная ошибка функции равна, следовательно,

$$\sigma_\Phi = \sqrt{\left(\frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta\bar{x}_2}\right)^2 \sigma_2^2}. \quad (16a)$$

Для случая суммы или разности двух величин имеем отсюда

$$\sigma_{x_1 \pm x_2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad (16б)$$

т.е. ошибка суммы или разности равна корню из суммы квадратов отдельных ошибок.

Из (13) вытекает совершенно очевидное следствие. Пусть за время  $t$  зарегистрировано  $N$  частиц, т.е. число частиц в единицу времени

$$N=N/t.$$

Дисперсия

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_N^2}{t^2} = \frac{nt}{t^2} = \frac{n}{t} . \quad (17)$$

Среднеквадратичная ошибка  $n$  равна

$$\sigma_n = \sqrt{n/t} .$$

В случаях, когда статистические ошибки доминируют, важно правильно распределить время между отдельными измерениями, чтобы ошибка результата была наименьшей. Пусть измеряются величины  $n_1, n_2, n_3$ , которые представляют собой числа частиц в единицу времени и длительности измерения каждой величины будут соответственно,  $t_1, t_2, t_3$ . Дисперсия искомой функции  $\Phi(n_1, n_2, n_3)$ , согласно (15) и (17),

$$\sigma^2 = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_3}\right)^2 \sigma_3^2 = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_1}\right)^2 \frac{n_1}{t_1} + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_2}\right)^2 \frac{n_2}{t_2} + \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_3}\right)^2 \frac{n_3}{t_3} .$$

Вариационным методом ищется минимум  $\sigma^2$  при условии  $t_1+t_2+t_3=T$ , где  $T$  – полное время измерения,

$$\delta(\sigma^2 + \lambda T) = \sum_i \left[ -\left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_i}\right)^2 \frac{n_i}{t_i^2} + \lambda \right] \delta t_i = 0 .$$

Так как вариации  $\delta t_i$  независимы, все коэффициенты при  $\delta t_i$  равны нулю, т.е.

$$\left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_i}\right)^2 \frac{n_i}{t_i^2} = \lambda, \quad t_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_i}\right) \sqrt{n_i} .$$

Таким образом, ошибка будет минимальна при распределении времени между измерениями по закону

$$t_1 : t_2 : t_3 = \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_1}\right) \sqrt{n_1} : \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_2}\right) \sqrt{n_2} : \left(\frac{\delta\Phi}{\delta n_3}\right) \sqrt{n_3} . \quad (18)$$

Например, эффект с препаратом равен  $n_1 = 900$  имп./мин., фон равен  $n_2 = 100$  имп./мин.

Измеряется интенсивность препарата  $\Phi(n_1, n_2) = n_1 - n_2$ . Согласно (18) времена измерений должны относиться следующим образом:

$$t_1 : t_2 = \sqrt{n_1} : \sqrt{n_2} = 3:1.$$

Таким образом, в данном случае на измерение эффекта следует тратить в 3 раза больше времени, чем на измерение фона.

Приводя результаты измерений, необходимо всегда указывать их среднеквадратичную ошибку. Если результаты подвергаются обработке, т.е. приводится некоторая функция от данных измерений, то ошибка вычисляется по формуле (16). Условие пригодности этой формулы: среднеквадратичные ошибки столь малы, что в разложении функции в ряд Тейлора вокруг средних значений можно пренебречь членами высших порядков по сравнению с линейными. Если результаты приводятся в виде графиков, то для каждой точки наносится среднеквадратичная ошибка, как указано, например, на рис.2

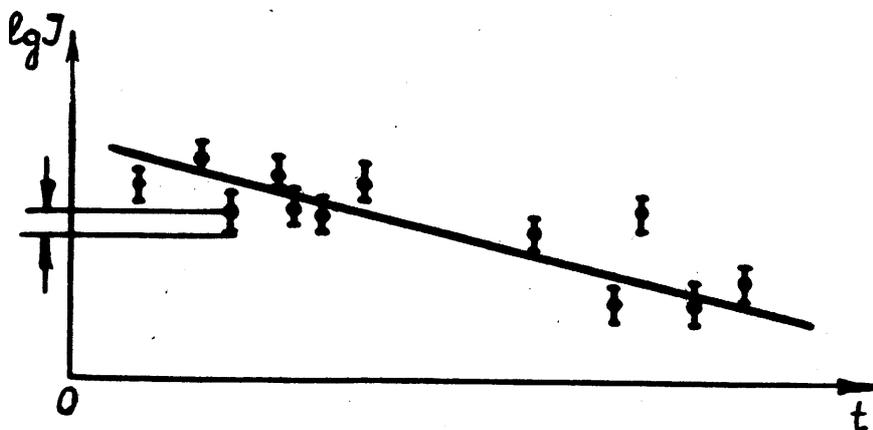


Рис.2. Кривая распада радиоактивного препарата.