

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9
ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ ЛИВНЕЙ
В ПРИБЛИЖЕНИИ А

Одномерная каскадная теория в приближении А

Цель упражнений 1 состоит в ознакомлении с основными процессами взаимодействия электронов* и фотонов больших энергий с веществом, которые приводят к возникновению электронно-фотонных каскадных ливней, и в изучении методов решения интегро-дифференциальных уравнений электромагнитной каскадной теории ливней путем использования интегральных преобразований Лапласа и Меллина.

При прохождении через вещество электроны и фотоны больших энергий участвуют в процессах тормозного излучения (электроны), образования пар (фотоны), испытывают ионизационные потери (электроны) и комптон-эффект (фотоны). Кроме того, электроны испытывают кулоновское рассеяние на ядрах атомов среды**. В области больших энергий основную роль играют процессы тормозного излучения электронов и образования электронно-позитронных пар фотонами. Тормозясь в поле ядра, электрон создает фотон с энергией, сравнимой по порядку величины с энергией первичного электрона. Фотон такой энергии может образовать электронно-позитронную пару или испытать комптоновское рассеяние. Образовавшиеся электроны в процессе тормозного излучения снова испускают фотоны и т. д. Вследствие этого в веществе вместо одного первичного электрона или первичного фотона с энергией E_0 образуется большое количество фотонов и заряженных электронов обоих знаков, составляющих так называемый электронно-фотонный каскадный ливень. При прохождении такого ливня через вещество одновременно с рождением частиц происходит дробление их энергии, которое будет продолжаться до тех пор, пока энергия возникающих вторичных

*Здесь и далее под электронами больших энергий будем понимать и электроны и позитроны.

** В данном параграфе нас интересует распределение частиц только по энергиям E и по глубине t слоя вещества. Процесс кулоновского рассеяния, приводящий к появлению распределения частиц по углам θ с осью ливня, в дальнейшем рассматривать не будем.

частиц не приблизится к некоторой критической энергии для данного вещества β . После этого заряженные частицы будут терять основную часть своей энергии на ионизацию среды, общее число частиц в ливне будет уменьшаться и ливень постепенно истощится.

Поведение ливневых электронов и фотонов в веществе описывается системой двух интегро-дифференциальных уравнений, которые являются основными уравнениями электромагнитной каскадной теории. Приведем вывод этих уравнений для области очень больших энергий ливневых частиц $E >> \beta$, когда ионизационными потерями частиц можно пренебречь. Пусть $P(E_0, E, t)$ и $\Gamma(E_0, E, t)$ - функция распределения соответственно электронов и фотонов с энергией E в интервале $E, E + dE$ на глубине t слоя вещества в ливне с полной энергией E_0 . При прохождении частицами ливня пути dt в веществе их число в энергетическом интервале $E, E + dE$ будет меняться из-за следующих эффектов:

а. Фотоны с энергией $E' \geq E$ в результате образования электронно-позитронных пар дадут

$$2dEdt \int_E^{\infty} \Gamma(E_0, E', t) W_p(E', E) dE' \quad (1)$$

электронов в интервале энергий $E, E + dE$.

б. Электроны с энергией $E' \geq E$ вследствие тормозного излучения образуют

$$dEdt \int_E^{\infty} P(E_0, E', t) W_e(E', E - E) dE' \quad (2)$$

электронов.

в. В результате тормозного излучения теряют энергию и покидают данный энергетический интервал

$$-dEdt P(E_0, E, t) \int_0^E W_e(E, E') dE' \quad (3)$$

электронов. Заметим, что интегралы (2) и (3) расходятся, однако их разность остается конечной величиной.

г. Электроны с энергией $E' \geq E$ вследствие тормозного излучения образуют

$$dEdt \int_E^{\infty} P(E_0, E', t) W_e(E', E) dE' \quad (4)$$

фотонов в интервале энергий $E, E + dE$.

д. В результате образования пар уходят из данного энергетического интервала

$$-dEdt\Gamma(E_0, E', t) \int_0^E W_p(E, E') dE' \quad (5)$$

фотонов.

В рассмотренных выше интегралах функция $W_e(E, E')dE'$ описывает вероятность тормозного излучения электроном с энергией E фотона с энергией E' на единице пути в веществе, а функция $W_p(E', E)dE$ - вероятность образования фотоном с энергией E' в поле ядра электронно-позитронной пары с энергией позитрона E и электрона $E' - E$ на единице пути в веществе. Упрощенные выражения этих вероятностей в приближении полного экранирования на одной радиационной единице длины пути в веществе имеют вид

$$W_e(E, E') = \frac{1}{E'}, \quad W_p(E', E) = \frac{\sigma_0}{E'} \quad (6)$$

где σ_0 - полный коэффициент поглощения фотонов на одной радиационной единице длины t_0 .

Учитывая эффекты а - д, запишем основные уравнения электромагнитной каскадной теории для функций распределения $P(E_0, E, t)$ и $\Gamma(E_0, E, t)$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(E_0, E', t)}{\partial t} &= 2 \int_E^\infty \Gamma(E_0, E', t) W_p(E', E) dE' + \int_E^\infty P(E_0, E', t) W_e(E', E' - E) dE' - \\ &- \int_0^E P(E_0, E, t) W_e(E, E') dE', \\ \frac{\partial \Gamma(E_0, E, t)}{\partial t} &= \int_0^E P(E_0, E', t) W_e(E', E) dE' - \\ &- \int_0^E \Gamma(E_0, E, t) W_p(E, E') dE' \end{aligned} \quad (7)$$

Будем искать аналитические выражения функций P и Γ методом интегральных преобразований Лапласа по переменной t и Меллина по переменной E . Преобразование Лапласа определяется как интеграл

$$P(E_0, E, \lambda) = \int_0^\infty P(E_0, E, t) e^{-\lambda t} dt \quad (8)$$

где λ - комплексный параметр. В общем случае функция $P(\lambda)$ определена в полуплоскости справа от прямой, параллельной мнимой оси.

Важным свойством преобразования Лапласа является то, что при не очень ограничивающих условиях соответствие между $P(t)$ и $P(\lambda)$, установленное формулой (8), однозначно: существует только одна функция $P(t)$, для которой $P(\lambda)$ является ее интегралом Лапласа. Если известна функция $P(\lambda)$, называемая трансформантой Лапласа, то функцию $P(t)$ можно определить при помощи формулы обратного преобразования Лапласа

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C P(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \quad (9)$$

где контур интегрирования C есть прямая, параллельная мнимой оси и расположенная в полуплоскости сходимости функции $P(\lambda)$.

Аналогично преобразуется функция $\Gamma(E_0, E, t)$. В результате применения преобразования Лапласа по переменной t к уравнениям (7) получим систему двух уравнений для трансформант Лапласа P, Γ

$$\begin{aligned} & -P(E_0, E, t=0) + \lambda P(E_0, E, \lambda) = \\ & = 2 \int_E^\infty \Gamma(E_0, E', \lambda) W_p(E', E) dE' + \int_E^\infty P(E_0, E', \lambda) W_e(E', E' - E) dE' - \\ & - \int_0^E P(E_0, E, \lambda) W_e(E, E') dE', \\ & -\Gamma(E_0, E, t=0) + \lambda \Gamma(E_0, E, \lambda) = \int_0^E P(E_0, E', \lambda) W_e(E', E) dE' - \\ & - \int_0^E \Gamma(E_0, E, \lambda) W_p(E, E') dE' \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим явные выражения сечений основных процессов (6) и (10) и применим к системе (10) преобразование Меллина по переменной E . Преобразование Меллина определяется как интеграл

$$P(E_0, s, \lambda) = \int_0^\infty P(E_0, E, \lambda) E^s dE, \quad (11)$$

где s – комплексный параметр. Если этот интеграл расходится на нижнем пределе при $s = s_a$, то он расходится и при всех значениях s , для которых $\operatorname{Re}(s) < \operatorname{Re}(s_a)$. Если интеграл Меллина сходится, то область его сходимости представляет собой полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными мнимой оси.

Преобразование Меллина, как и преобразование Лапласа, однозначно и может быть обращено по формуле

$$P(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C P(E) E^{-(s+1)} ds, \quad (12)$$

где контур интегрирования C представляет собой прямую, параллельную мнимой оси и расположенную внутри полосы сходимости.

Применяя преобразование Меллина по переменной E , к системе уравнений (10), последовательно получаем:

$$\begin{aligned} 1) & 2 \int_0^\infty E^s dE \int_E^\infty \Gamma(E_0, E', \lambda) W_p(E', E) dE' = \\ & = 2 \int_0^\infty E^s dE \int_E^\infty \Gamma(E_0, E', \lambda) \frac{\sigma_0}{E'} dE' = 2\sigma_0 \int_0^\infty \Gamma(E_0, E', \lambda) \frac{dE'}{E'} \int_0^E E^s dE = \\ & = \frac{2\sigma_0}{s+1} \int_0^\infty \Gamma(E_0, E', \lambda) E'^s dE' = B(s) \Gamma(E_0, s, \lambda); \end{aligned}$$

$$2) \int_0^\infty E^s dE \left\{ \int_E^\infty P(E_0, E', \lambda) W_e(E', E' - E) dE' - \int_0^E P(E_0, E, \lambda) W_e(E, E') dE' \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty E^s dE \left\{ \int_0^\infty P(E_0, E', \lambda) \frac{dE'}{E' - E} - P(E_0, E, \lambda) \int_0^E \frac{dE'}{E'} \right\} = \\
&= \int_0^\infty dE' P(E_0, E', \lambda) \int_0^{E'} \frac{E^s dE}{E' - E} - \int_0^\infty E^s dE P(E_0, E, \lambda) \int_0^E \frac{dE'}{E'} = \\
&= \int_0^\infty dE' P(E_0, E', \lambda) E'^s \int_0^1 \frac{v^s dv}{1-v} - \\
&\quad - \int_0^\infty E^s dE P(E_0, E, \lambda) \int_0^1 \frac{dv}{1-v} = P(E_0, s, \lambda) \left\{ \int_0^1 \frac{v^s dv}{1-v} - \int_0^1 \frac{dv}{1-v} \right\} = \\
&= -P(E_0, s, \lambda) \int_0^1 \frac{dv}{v} \left[1 - (1-v)^s \right] = \\
&= -A(s) P(E_0, s, \lambda);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \int_0^\infty E^s dE \int_E^\infty P(E_0, E', \lambda) W_e(E', E) dE' = \\
&= \int_0^\infty dE' P(E_0, E', \lambda) \int_0^{E'} \frac{1}{E} E^s dE = \\
&= \frac{1}{s} \int_0^\infty P(E_0, E', \lambda) E'^s dE' = C(s) P(E_0, s, \lambda);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) - \int_0^\infty E^s dE \int_0^E \Gamma(E_0, E, \lambda) W_p(E, E') dE' = \\
&= - \int_0^\infty E^s dE \Gamma(E_0, E, \lambda) \frac{\sigma_0}{E} \int_0^E dE' = -\sigma_0 \Gamma(E_0, s, \lambda); \quad (13)
\end{aligned}$$

где

$$A(s) = \int_0^{\infty} \left[1 - (1-v)^s \right] \frac{dv}{v}; \quad B(s) = \frac{2\sigma_0}{s+1}; \quad C(s) = \frac{1}{s} \quad (14)^*$$

В результате получим систему уравнений для функций $P(E_0, s, \lambda)$ и $\Gamma(E_0, s, \lambda)$ в виде

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} E^s P(E_0, E, t=0) dE + \lambda P(E_0, s, \lambda) = \\ & = -A(s)P(E_0, s, \lambda) + B(s)\Gamma(E_0, s, \lambda), \\ & - \int_0^{\infty} E^s \Gamma(E_0, E, t=0) dE + \lambda \Gamma(E_0, s, \lambda) = \\ & = C(s)P(E_0, s, \lambda) - \delta_0 \Gamma(E_0, s, \lambda). \end{aligned} \quad (15)$$

Для решения системы (15) необходимо выбрать граничные условия. Если на границу полубесконечного слоя вещества падает первичный электрон с энергией E_0 , то граничные условия можно записать в форме

$$P(E_0, E, t=0) = \delta(E_0 - E), \quad \Gamma(E_0, E, t=0) = 0 \quad (16)$$

где $\delta(E_0 - E)$ - дельта-функция Дирака. Поскольку

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} E^s P(E_0, E, T=0) dE = \int_0^{\infty} E^s \delta(E_0 - E) dE = E_0^s, \\ & \int_0^{\infty} E^s \Gamma(E_0, E, t=0) dE = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

то, подставляя (16) в (15), получаем

* Если для сечений $W_e(E', E)$ и $W_p(E', E)$ использовать более точные выражения, чем (6), то численные значения функций $A(s)$, $B(s)$ и $C(s)$ в интересующем нас интервале значений s несколько изменятся, однако для простоты можно ограничиться формулами (14) для проведения численных расчетов.

$$\begin{aligned}
-E_0^S + \lambda P(E_0, s, \lambda) &= -A(s)P(E_0, s, \lambda) + \\
&+ B(s)\Gamma(E_0, s, \lambda), \\
\lambda\Gamma(E_0, s, \lambda) &= C(s)P(E_0, s, \lambda) - \sigma_0\Gamma(E_0, s, \lambda).
\end{aligned} \tag{18}$$

Решая систему (18), получаем

$$P(E_0, s, \lambda) = \frac{E_0^S}{\Psi(\lambda, s)}, \quad \Gamma(E_0, s, \lambda) = \frac{C(s)}{\lambda + \sigma_0} \frac{E_0^S}{\Psi(\lambda, s)} \tag{19}$$

где функция $\Psi(\lambda, s) = \lambda + A(s) - B(s)C(s)/(\lambda + \sigma_0)$ - известная функция каскадной теории. Ее можно представить в виде

$$\Psi(\lambda, s) = \frac{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]}{\lambda + \sigma_0} \tag{20}$$

где $\lambda_1(s)$ $\lambda_2(s)$ – корни уравнения $\Psi(\lambda, s) = 0$. Используя (20), выполним обратное преобразование Лапласа

$$\begin{aligned}
P(E_0, s, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\lambda e^{\lambda t} P(E_0, s, \lambda) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{d\lambda (\lambda + \sigma_0) E_0^S}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} e^{\lambda t}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Вычисляя интеграл (21) по полюсам $\lambda = \lambda_1(s)$ и $\lambda = \lambda_2(s)$, получаем

$$P(E_0, s, t) = E_0^S \left[H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \right], \tag{22}$$

где

$$H_1(s) = \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}, \quad H_2(s) = \frac{\lambda_2(s) + \sigma_0}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)} \tag{23}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\Gamma(E_0, s, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\lambda e^{\lambda t} \Gamma(E_0, s, \lambda) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{d\lambda (\lambda + \sigma_0) C(s) E_0^S e^{\lambda t}}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} = \frac{C(s) E_0^S}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_1(s)t} + \\
&\quad \frac{C(s) E_0^S}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)} e^{\lambda_2(s)t}.
\end{aligned} \tag{24}$$

В области глубин $t > 1$ членами с $\exp\{\lambda_2(s)t\}$ в формулах (22) и (24) можно пренебречь.

Применим теперь к функциям $P(E_0, s, t)$ и $\Gamma(E_0, s, t)$ обратное преобразование Меллина

$$P(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{ds}{E} H_1(s) e^{s \ln(E_0/E) + \lambda_1(s)t},$$

$$\Gamma(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{ds}{E} \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{s \ln(E_0/E) + \lambda_1(s)t} \quad (25)$$

Для вычисления контурных интегралов (25) можно использовать так называемый метод перевала. Будем считать, что предэкспоненциальные множители в подынтегральных функциях (25) слабо зависят от s , что справедливо при достаточно больших значениях t . Можно утверждать, что при таком предположении получим первый член разложения решения по обратным степеням t . Рассмотрим функцию

$$\varphi_0(E_0, E, s, t) = s \ln(E_0/E) + \lambda_1(s)t. \quad (26)$$

При $s \rightarrow 0$ функция $\varphi \rightarrow \infty$ так как $\lambda_1(0) \rightarrow \infty$; при $s \rightarrow \infty$ функция φ_0 также стремится к ∞ . Следовательно, функция φ_0 имеет минимум при некотором действительном положительном значении s . Это значение определяется из уравнения $\partial\varphi_0/\partial s=0$ или, в раскрытом виде, из условия

$$\ln(E_0/E) + \lambda_1'(s_m)t = 0 \quad (27)$$

Перенесем контур интегрирования так, чтобы он проходил через точку s_m . Если функция φ_0 имеет минимум в точке s_m при изменении переменной вдоль действительной оси, то и в этой же точке s_m функция φ_0 будет иметь максимум при изменении переменной вдоль перпендикулярной оси. Это свойство следует из того, что аналитическая функция φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0 \quad (28)$$

где

$$s = s_m + x + iz \quad (29)$$

Разложим функцию φ_0 в ряд по степеням $iz = s - s_m$ и ограничимся первыми двумя неисчезающими членами разложения:

$$\varphi_0 = \varphi_0(s_m) - \frac{z^2}{2} \varphi''_0(s_m) \quad (30)$$

Следующие члены дают поправку порядка $1/t$, и поэтому здесь ими можно пренебречь. Подставим разложение (30) в (25) и получим:

$$P(E_0, E, t) = \frac{H_1(s) E_0^s \exp\{\lambda_1(s)t\}}{E^{s+1} \{2\pi\lambda_1''(s)t\}^{1/2}} \quad (31)$$

$$\Gamma(E_0, E, t) = \frac{C(s) E_0^s \exp\{\lambda_1(s)t\}}{E^{s+1} [\lambda_1(s) - \lambda_2(s)] \{2\pi\lambda_1''(s)t\}^{1/2}}$$

В выражениях (31) переменные E_0 , E , s и t связаны условием перевала

$$\ln(E_0/E) + \lambda'_1(s)t = 0 \quad (32)$$

Формулы (31) и (32) позволяют рассчитать функции распределения электронов и фотонов по энергии E на различных глубинах t слоя вещества в случае ливня, образованного первичным электроном с энергией E_0 . Рассмотренным выше методом можно провести расчеты и для ливня, образованного первичным фотоном с энергией E_0 . В последнем случае граничные условия следует взять в виде

$$P(E_0, E, t=0) = 0$$

$$\Gamma(E_0, E, t=0) = \delta(E_0 - E) \quad (33)$$

В качестве упражнений следует провести расчеты зависимостей $\{P(E_0, E, t)\}^{P,\Gamma}$ или $\{\Gamma(E_0, E, t)\}^{P,\Gamma}$ от глубины t для заданного значения величины E_0/E , или же соответствующих интегральных по E функций $\{N_{P,\Gamma}(E_0, E, t)\}^{P,\Gamma}$ здесь верхний индекс P означает первичный электрон, верхний индекс Γ – первичный фотон).

Упражнение 1. Рассчитать зависимости от глубины t числа частиц с энергией E , $E + dE$ в ливне от первичной частицы с энергией E_0 при заданной величине E_0/E :

$$\{P(E_0, E, t)\}^P, \{P(E_0, E, t)\}^\Gamma, \{N_P(E_0, E, t)\}^P, \{N_\Gamma(E_0, E, t)\}^\Gamma,$$

$$\{P(E_0, E, t)\}^\Gamma, \{P(E_0, E, t)\}^P, \{N_\Gamma(E_0, E, t)\}^\Gamma, \{N_P(E_0, E, t)\}^P$$

Упражнение 2. Решить систему (7), добавив в правые части уравнений функции источника вида:

- а) $s_p(E, t) = \delta(E_0 - E)$, $s_\Gamma(E, t) = \delta(E_0 - E)$
- б) $s_p(E, t) = \delta(E_0 - E)e^{-\mu t}$, $s_\Gamma(E, t) = \delta(E_0 - E)e^{-\mu t}$
- в) $s_p(E, t) = f_p(E, t)$, $s_\Gamma(E, t) = f_\Gamma(E, t)$

Упражнение 3. Решить систему (7) для граничных условий в форме:

$$P(E_0, E, t=0) = 1/E^{s_1} \text{ при } E > E_1 \text{ и } 0 \text{ при } E < E_1$$

$$\Gamma(E_0, E, t=0) = 1/E^{s_1} \text{ при } E > E_1 \text{ и } 0 \text{ при } E < E_1$$

Упражнение 4. Решить систему (7) с граничными условиями упр. 3 а) с добавлением функций источника упр. 2. б). Определить «равновесный» спектр, исследовать его поведение при различных соотношениях между μ и s_1 .

Угловое распределение частиц в электронно-фотонном ливне

При движении в веществе лавинные частицы отклоняются от направления движения первичной частицы за счет каскадных процессов радиационного торможения и образования пар. Углы отклонения при этих процессах по порядку величины равны mc^2/E , где E – энергия первичной частицы. Заряженные частицы отклоняются из-за резерфордовского рассеяния на ядрах атомов среды. Это отклонение гораздо больше отклонения из-за каскадных процессов, которыми можно пренебречь всюду, за исключением самого начала развития лавины.

Запишем в приближении А основные уравнения каскадной теории, считая углы отклонения частиц малыми и рассматривая рассеяние как многоократное [1, 2]. В приближении малых углов функции $P, \Gamma(E_0, E, t, \theta_x, \theta_y)$ или $P, \Gamma(E_0, E, t, \theta, \varphi)$ есть функции E_0, E, t, θ , где

$$\begin{aligned}
\theta &= \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}, \\
\frac{\partial P(E_0, E, t, \theta)}{\partial t} &= L_1 [P(E_0, E, t, \theta), \Gamma(E_0, E, t, \theta)] + \\
&+ \frac{E^2}{4E^2} \Delta_\theta P(E_0, E, t, \theta) \\
&\quad , \\
\frac{\partial \Gamma(E_0, E, t, \theta)}{\partial t} &= L_2 [P(E_0, E, t, \theta), \Gamma(E_0, E, t, \theta)], \tag{1}
\end{aligned}$$

выражение для оператора Лапласа $\Delta_\theta = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta \frac{\partial}{\partial \theta})$.

Здесь $P(E_0, E, t, \theta)$, $\Gamma(E_0, E, t, \theta)$ – искомые функции распределения электронов и фотонов по энергии E , глубине t (измеряемой в лавинных единицах) и углу отклонения от оси ливня θ (двумерный угол). Постоянная $E_k = 21$ Мэв, L_1 и L_2 – интегральные операторы, учитывающие процессы радиационного торможения и образования пар:

$$\begin{aligned}
L_1 [P, \Gamma] &= 2 \int_E^{E_0} \Gamma(E', t) W_p(E', E) dE' + \int_E^{E_0} P(E', t) \times \\
&\times W_e(E', E' - E) dE' - \int_E^{E_0} P(t, E) W_e(E, E') dE', \\
L_2 [P, \Gamma] &= \int_E^{E_0} P(E', t) W_e(E', E) dE' - \\
&- \int_0^E \Gamma(E, t) W_p(E, E') dE' \tag{2}
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай простейшего граничного условия, соответствующий одному первичному электрону, падающему вертикально на границу слоя вещества при $t = 0$.

Разложим функции $P(E', t)$ и $\Gamma(E', t)$ по функциям Бесселя нулевого порядка, используя соотношения (преобразования Ханкеля)

$$P(E_0, E, t, \theta) = \int_0^\infty D_p(E_0, E, t, k) J_0(k\theta) k dk$$

где

$$D_p(E_0, E, t, \theta) = \int_0^\infty P(E_0, E, t, k) J_0(k\theta) \theta dk.$$

Здесь $J_0(k\theta)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Аналогичные соотношения запишем для функций Γ и D_Γ . Умножим уравнения (1) на $J_0(k\theta)\theta$ и проинтегрировав по θ от 0 до ∞ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_p(E_0, E, t, k)}{\partial t} &= L_1 \left[D_p(E_0, E, t, k), D_\Gamma(E_0, E, t, k) \right] - \\ &- \frac{E^2 k^2}{4E^2} D_p(E_0, E, t, k), \\ \frac{\partial D_\Gamma(E_0, E, t, k)}{\partial t} &= L_2 \left[D_p(E_0, E, t, k), D_\Gamma(E_0, E, t, k) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Перейдем к трансформантам Лапласа по t . Умножим (3) на $e^{-\lambda t}$ и, проинтегрировав от t от 0 до ∞ , получим

$$\begin{aligned} \frac{-\delta(E_0 - E)}{2\pi} + \lambda D_p(E_0, E, \lambda, k) &= L_1[D_p, D_\Gamma] - \\ &- \frac{E^2 k^2}{4E^2} D_p(E_0, E, \lambda, k), \\ \lambda D_\Gamma(E_0, E, \lambda, k) &= L_2[D_p, D_\Gamma] \end{aligned}$$

Исключив D_Γ из второго уравнения по формуле

$$D_\Gamma(E_0, E, \lambda, k) = \frac{1}{\lambda + \sigma_0} \int_E^{E_0} D_p(E_p, E', \lambda, k) W_e(E', E) dE'$$

получим уравнение для D_p

$$\frac{\delta(E_0 - E)}{2\pi} - \frac{E_k^2 k^2}{4E^2} D_p(E_0, E, \lambda, k) = L[D_p(E_0, E, \lambda, k)] \quad (5)$$

Здесь L - интегральный оператор, описывающий процессы радиационного торможения электронов и образования пар фотонами.

$$\begin{aligned} L[D_p(E_0, E, \lambda, k)] &= - \int_E^{E_0} D_p(E_p, E', \lambda, k) K(E', E, \lambda) dE' - \\ &- \int_E^{E_0} D_p(E_p, E', \lambda, k) W_e(E', E - E) dE' + \\ &+ D_p(E_p, E, \lambda, k) \int_0^E W_e(E', E) dE' + \lambda D_p(E_p, E', \lambda, k), \end{aligned}$$

где

$$K(E', E, \lambda) = 2 \int_E^{E_1} \frac{W_e(E', \varepsilon) W_p(\varepsilon, E)}{\lambda + \sigma_0} d\varepsilon \quad (6)$$

Умножим (6) на E^s и проинтегрируем по dE от E_1 до E_0 . (Здесь s – некоторый, пока неопределенный комплексный параметр.) Изменив в некоторых двойных интегралах порядок интегрирования и обозначения E на E' и E_1 на E , получим

$$\int_E^{E_0} E'^s L[D_p(E_0, E', \lambda, k)] dE' = \int_E^{E_0} D_p(E_0, E', \lambda, k) \times \times \varphi(E', E, \lambda, s) dE', \text{ где}$$

$$\begin{aligned} \varphi(E', E, \lambda, s) &= -K_1(E, E', \lambda, s) + \\ &+ K_2(E', s) - K_3(E, E', s) + \lambda E'^s \\ K_1(E, E', \lambda, s) &= \int_E^{E'} dE'' E''^s K(E'', E', \lambda), \\ K_2(E', s) &= E'^s \int_0^{E'} W_e(E', E'') dE'', \\ K_3(E, E', s) &= \int_E^{E_1} W_e(E', E' - E'') E''^s dE''. \end{aligned} \quad (7)$$

Получим явное выражение для функции $\varphi(E', E, \lambda, s)$, используя приближенные выражения для W_e и W_p

$$W_e(E, E')dE' = \frac{dE'}{E'}$$

$$W_p(E', E)dE = \sigma_0 \frac{dE}{E'}, \text{ где } \sigma_0 = 0,073$$

После вычисления интегралов

$$\varphi(E', E, \lambda, s) = -E^s \left\{ \psi(\lambda, s)x^{-s} + f(x, \lambda, s) \right\}, \text{ где}$$

$$\psi(\lambda, s) = \frac{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]}{\lambda + \sigma_0} \quad (8)$$

$\lambda_1(s), \lambda_2(s), B(s), C(s)$ - функции каскадной теории

$$f(x, \lambda, s) = \frac{B(s)C(s)}{\lambda + \sigma_0} (xs - s - 1) -$$

$$-\frac{x}{s+1} {}_2F_1(1, s+1; s+2; x), \quad x = \frac{E}{E'},$$

${}_2F_1(1, s+1; s+2; x)$ - гипергеометрическая функция. Функция $f(x, \lambda, s)$ медленно меняется с изменением x в интервале $0 \leq x \leq 0,9$. Чтобы функция $\varphi(E', E, \lambda, s)E^s$ также слабо менялась с изменением s , необходимо положить $\lambda = \lambda_1(s)$ или $\lambda = \lambda_2(s)$.

Теперь соотношение (7) можно переписать:

$$\int_E^{E_0} E'^s L[D_p(E_0, E', s, k)]dE' =$$

$$= E^s q(E, s, k) D_N(E_0, E, s, k),$$

$$D_N(E_0, E, s, k) = \int_E^{E_0} D_p(E_0, E', s, k) dE',$$

$$q(E, s, k) =$$

$$= \frac{1}{D_N(E_0, E', s, k)} \int_E^{E_0} \frac{\partial D_N(E_0, E', s, k)}{\partial E'} f\left(\frac{E}{E'}, s\right) dE'. \quad (9)$$

В соотношении (9) s и λ связаны соотношением $\lambda = \lambda_1(s)$. В первом приближении предполагают $q(E_0, s, k) = q(s)$. Тогда, продифференцировав (9) по E и разделив полученное равенство на E^s , получим приближенное выражение оператора L ,

описывающего процессы радиационного торможения и образования пар

$$L[D_p(E_0, E, \lambda, k)] = q(s) \frac{\partial D_N(E_0, E, \lambda, k)}{\partial E} + \\ + \frac{sq(s)}{E} D_N(E_0, E, \lambda, k). \quad (10)$$

В этом случае уравнение для D_N записывается в виде

$$\left[q(s) + \frac{E_k^2 k^2}{4E^2} \right] \frac{\partial D_N}{\partial E} + \frac{sq(s)}{E} D_N(E_0, E, s, k) = \frac{\delta(E_0 - E)}{2\pi} \quad (11)$$

Здесь $q(s)$ выражается через известные функции каскадной теории

$$q(s) = -\frac{s\lambda'_1(s)}{H_1(s)}$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$D_N(E_0, E, s, k) = \frac{E_0^2}{2\pi q} (E_0^2 + E_k^2 k^2 / 4q)^{-1+s/2} \times \\ \times (E^2 + E_k^2 k^2 / 4q)^{-s/2} \text{ при } E < E_0 \quad (12)$$

при $E \geq E_0$ оно равно нулю.

Упражнение 1. Используя трансформанты Ханкеля $D_N(E_0, E, s, k)$ получить функции $N_p(E_0, E, s, \theta)$, когда $E_0 \gg E$.

Упражнение 2. Получить трансформанту Ханкеля $D_N(E_0, E, s, k)$ для произвольных граничных условий и произвольного вида функций источника:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = L[P, \Gamma] + \frac{E_k^2}{4E^2} \Delta \theta P + s_p(E, t),$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = L_2[P, \Gamma] + s_\Gamma(E, t),$$

$$P(E_0, E, \theta, t=0) = \varphi_p(E_0, E, \theta),$$

$$\Gamma(E_0, E, \theta, t=0) = \varphi_\Gamma(E_0, E, 0).$$

Упражнение 3. Получить $D_N(E_0, E, s, \theta)$ для случая граничных условий $\Gamma(E_0, E, \theta, 0) = 0$,

$$P(E_0, E, \theta, 0) = \delta(E_0 - E) \delta(\theta_{x0} - \theta_x) \delta(\theta_{y0} - \theta_y),$$

соответствующих одному первичному электрону, падающему на границу под углом $\theta_0 = \sqrt{\theta_{x0}^2 + \theta_{y0}^2}$.

Указание: Использовать преобразование Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int d\theta_x d\theta_y e^{i(\theta_x k_x + \theta_y k_y)} f(\theta_x, \theta_y) = \\ = \Phi(k_x, k_y)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int dk_x dk_y e^{i(\theta_x k_x + \theta_y k_y)} \Phi(k_x, k_y) = \\ = f(\theta_x, \theta_y)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С.З. Лавинные процессы в космических лучах. М., ГТТИ, 1948.
2. Иваненко И.П. Электромагнитные каскадные процессы. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.